

山西能源学院教案

授课班级 能动 1701-1704 授课时间 计 2 学时

课题（章节及内容）	4.4 非稳态导热问题的数值解法
教学目的和要求	理解几种差分形式； 了解非稳态导热的显示和隐式格式； 了解扩散项离散时所取时间层的不同对计算带来的影响。
重点难点	时间-空间区域的离散化； 非稳态项离散的方法。
教学进程（含课堂教学内容、教学方法、辅助手段等）	教学内容：时间-空间区域的离散化；非稳态导热方程的隐式格式；边界节点的离散方程。 教学方法：讲授与练习、启发讨论、诱导式、归纳总结法。
作业布置	
主要参考资料	《传热学》第四版，杨世铭，陶文铨， 高等教育出版社，2006年8月
课后自我总结分析	本章内容以分析推导为主，要求学生具有扎实的数学功底，课堂上部分学生因高数基础不好而无法理解推导过程（如泰勒展开），老师应尽可能对相关数学知识做复习补充。

山西能源学院教案

4-4 非稳态导热问题的数值解法

由前可知：非稳态导热和稳态导热二者微分方程的区别在于控制方程中多了一个非稳态项，其中扩散项的离散方法与稳态导热一样。

一、一维非稳态导热时间——空间区域的离散化

1、基本概念

如图 4-8 所示， x 为空间坐标， τ 为时间坐标。

1) 时间步长 $\Delta\tau$ ：指从一个时间层到下一个时间层的间隔 $\Delta\tau$ 。

2) 节点 (n, i) ——表示空间网格线与时间网格线的交点，即表示了时间——空间区域中一个节点的位置，相应的记为： $t_n^{(i)}$

2、非稳态项的离散

非稳态项的离散有三种不同的格式：

1) 向前差分

2) 向后差分

3) 中心差分

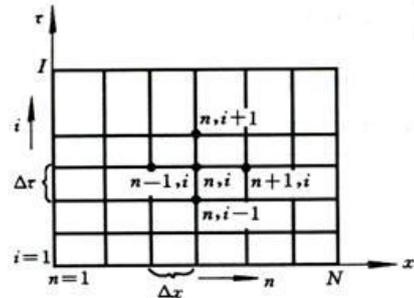


图 4-8 一维非稳态导热时间-空间区域的离散化

1) 向前差分（本书主要采用）

将函数 t 在节点 $(n, i+1)$ 对点 (n, i) 作泰勒展开，则有：

$$t_n^{(i+1)} = t_n^{(i)} + \Delta\tau \left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} + \frac{\Delta\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right|_{n,i} + \dots$$

于是有

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

其中 $O(\Delta\tau)$ 截断误差表示余项中 $\Delta\tau$ 的最低阶为一次。

由上式得：函数 t 在节点 $(n, i+1)$ 对点 (n, i) 处一阶导数的向前差分公式：

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} \quad (4-10)$$

2) 向后差分

将函数 t 在节点 $(n, i-1)$ 对点 (n, i) 作泰勒展开，可得 $\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i}$ 的向后差分公

$$\text{式: } \left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,j} = \frac{t_n^{(i)} - t_n^{(i-1)}}{\Delta \tau} \quad (4-11)$$

3) 中心差分

$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,j}$ 的向前差分与向后差分之和, 即得 $\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,j}$ 的中心差分表达式:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,j} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i-1)}}{2\Delta \tau} \quad (4-12)$$

二、一维非稳态导热微分方程的离散方法

1、泰勒级数展开法

1) 一维非稳态导热微分方程中的扩散项离散与稳态导热微分方程中的方法相同, 则

对一维非稳态导热微分方程中 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ 的扩散项 \rightarrow 中心差分;

非稳态项 \rightarrow 向前差分。

(1) 非稳态项: $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ 采用向前差分为:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,j} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} \quad (4-13)$$

(2) 稳态项: $\alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ 采用中心差分则为:

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{n,j} = \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2} \quad (4-14)$$

由此可得:

$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = \alpha \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$

变形得:

$$t_n^{(i+1)} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} (t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2}\right) t_n^{(i)} \quad (4-15)$$

由此可见, 只要 i 时层上各节点的温度已知, 那么 $i+1$ 时层上各节点的温度即可算出, 且不需设立方程组求解。此关系式即为显式差分格式。

2) 显示差分与隐式差分格式

求解非稳态导热微分方程，是从已知的初始温度分布出发，根据边界条件依次求得以后各个时间层上的温度值。

(1) 显示差分格式

定义：就是指若已知 i 时层上各节点的温度值，根据该差分格式即可算出 $(i+1)$ 时层上各内点的温度，而不必求解联立方程。即 $t_n^{(i+1)}$ 是前一时刻 (i) n 节点及相邻两节点温度的显函数。

优点：计算工作量小；

缺点：受时间及空间步长的限制。

(2) 隐式差分格式

对一维非稳态导热微分方程 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ 中的扩散项在 $(i+1)$ 时层上采用中心差分，非稳态项将 t 在节点 $(n, i+1)$ 处对节点 (n, i) 采用向前差分，

$$\text{得：} \quad \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = \alpha \frac{t_{n+1}^{(i+1)} - 2t_n^{(i+1)} + t_{n-1}^{(i+1)}}{\Delta x^2} \quad (4-16)$$

式中，已知的是 i 时层上的值 $t_n^{(i)}$ ，而未知量有 3 个，无法求解 $t_n^{(i+1)}$ 。

定义：就是指已知 i 时层上各节点的温度值 $t_n^{(i)}$ ，根据差分格式不能直接算出 $(i+1)$ 时层上各节点的温度，而必须求解 $(i+1)$ 时层上的一个联立方程组，才能算出 $(i+1)$ 时层各节点的温度，此种差分格式称隐式差分格式。

优点：不受时间及空间的步长影响；

缺点：计算工作量大。

综上所述：① 非稳态导热微分方程中，扩散项采用中心差分，非稳态项采用向前差分得到显式差分格式；

② 非稳态导热微分方程中，扩散项采用中心差分，非稳态项采用向后差分得到隐式差分格式。

2、热平衡法

1) 优点：(1) 不受网格是否均匀限制；

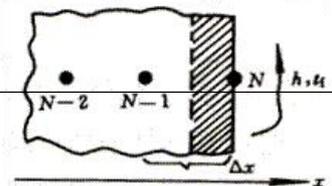


图 4-9 边界节点离散方程的建立

(2) 不受物体是否为常数限制。

2) 求解方法

如图 4-9 所示, 一无限大平板, 右侧面受周围流体的冷却, 表面传热系数为 h , 对于边界节点 N 代表了宽为 $\frac{\Delta x}{2}$ 的元体。

对于该元体, 根据傅立叶定律和能量守恒定律得:

$$\lambda \frac{t_{N-1}^{(i)} - t_N^{(i)}}{\Delta x} + h(t_f - t_N^{(i)}) = \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)}}{\Delta \tau}$$

变形为
$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} \left(1 - \frac{2h\Delta\tau}{\rho c \Delta x} - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \right) + \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} t_{N-1}^{(i)} + \frac{2h\Delta\tau}{\rho c \Delta x} t_f \quad (4-17)$$

其中 $\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$ ——是以 Δx 为特征长度的傅里叶数, 称网络傅里叶数, 记为: Fo_{Δ} 。

$\frac{h\Delta x}{\lambda}$ ——是以 Δx 为特征长度的毕渥数, 称网络毕渥数, 记为: Bi_{Δ} 。

$\frac{h\Delta\tau}{\rho c \Delta x}$ 一项变形如下:

$$\frac{h\Delta\tau}{\rho c \Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \cdot \frac{h\Delta x}{\lambda} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \cdot \frac{h\Delta x}{\lambda} = Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta}$$

所以
$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} (1 - 2 Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} - 2 Fo_{\Delta}) + 2 Fo_{\Delta} t_{N-1}^{(i)} + 2 Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} \cdot t_f \quad (4-18)$$

补充: 4-17 的推导过程

对于 $\frac{\Delta x}{2}$ 的元体:

(1) 根据傅立叶定律, 在 i 时层上, 从节点 $N-1$ 传导给节点 N 的热流量,

即从 $N-1$ 传给元体 $\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ 单位面积的热流量为: $q_{N-1, N}^{(i)} = \lambda \frac{t_{N-1}^{(i)} - t_N^{(i)}}{\Delta x}$

(a)

(2) 根据牛顿冷却公式, 平板右侧被冷却时, 在 i 时层上其单位面积损失的热流量为:

$$q = h(t_f - t_N^{(i)}) \quad (b)$$

(3) 在 i 时层上元体 $\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ 热力学能的增量: $q = \rho c \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \Big|_{N,i} \cdot \frac{\Delta x}{2}$

其中
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \Big|_{N,i} = \frac{t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)}}{\Delta \tau}$$

(4) 根据能量守恒定律可知：在 I 时层通过导热和对流进入元体 $\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ 的能量应等于元体热力学能的变化量，即

$$\lambda \frac{t_{N-1}^{(i)} - t_N^{(i)}}{\Delta x} + h(t_f - t_N^{(i)}) = \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)}}{\Delta \tau}$$

变形为：
$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} (1 - 2 Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} - 2 Fo_{\Delta}) + 2 Fo_{\Delta} t_{N-1}^{(i)} + 2 Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} \cdot t_f$$
 (4-18)

说明：对多维非稳态导热问题应用热平衡法来建立离散方程的原则与过程与之类似。

三、讨论一维导热问题显式差分格式稳定性限制的物理意义

从离散方程的结构分析：

对于一维导热显式格式的内节点方程

$$t_n^{(i+1)} = Fo_{\Delta} (t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_n^{(i)}, \quad \text{其中 } n = 1, 2, \dots, N-1$$

由方程式得知，点 n 上 i+1 时刻的温度是在该点 i 时刻温度的基础上计及了左右两邻点温度的影响后得出的。若两邻点的影响保持不变，则合理的情况是：

$$t_n^{(i)} \text{ 越高，则 } t_n^{(i+1)} \text{ 越高； } t_n^{(i)} \text{ 越低，则 } t_n^{(i+1)} \text{ 越低。}$$

在上式中，满足这种合理性是有条件的，即上式中 $t_n^{(i)}$ 前的系数必大于等于零，即 $(1 - 2 Fo_{\Delta}) \geq 0$

亦即：
$$Fo_{\Delta} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \leq 1/2$$

否则，将出现不合理情况。若 $(1 - 2 Fo_{\Delta}) < 0$ ，则表明节点 (n, i) 在 i 时刻的 $t_n^{(i)}$ 越高，经 $\Delta \tau$ 时段后， $t_n^{(i+1)}$ 越低，这种节点温度随时间的跳跃式变化是不符合物理规律的，所以称该方程具有不稳定性。

2、对于一维导热显示格式的对流边界节点方程：

$$t_N^{(i+1)} + t_N^{(i)} (1 - 2Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} - 2Fo_{\Delta}) + 2Fo_{\Delta} t_{N-1}^{(i)} + 2Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} \cdot t_f$$

得出合理条件的条件是：
$$1 - Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} - 2 Fo_{\Delta} \geq 0$$

即：
$$Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2(1 + Bi_{\Delta})}$$

由此可见：（1）对流边界节点要得到的合理的解，其限制条件比内节点更为严格，所以，当由边界条件及内节点的稳定性条件得出的 F_{Δ} 不同时，应选择较小的 F_{Δ} 来确定允许采用的 $\Delta\tau$ 。

（2）对于第一、二类边界条件，其限制条件只有内节点的限制条件。

（3）内边界节点差分方程的稳定性条件不同，但在数值计算时，二节点又必须选择相同的 Δx ， $\Delta\tau$ 。因此，在选择 Δx 后，则 $\Delta\tau$ 的选择就要受到稳定条件的限制，不能任意选择，而必须按两节点的稳定性条件分别计算 $\Delta\tau$ ，取其中较小 $\Delta\tau$ 作为时间步长，方能满足二者稳定性要求。

四、数值解法的求解步骤

- 1、首先选择空间坐标间隔 Δx ，即距离步长。对二维问题一般使 $\Delta y = \Delta x$ ；
- 2、对显式格式差分方程，根据方程的稳定性条件选择允许的最大时间步长 $\Delta\tau$ ；在稳定性条件允许范围内， $\Delta\tau$ 越大，计算工作量越小，但精度较差；对一维问题，一般取 $\frac{1}{4} \leq F_{\Delta} \leq \frac{1}{2}$ ，即可满足工程精度要求；对于隐式差分方程， Δx ， $\Delta\tau$ 可任意选取，不必进行稳定性条件校核；
- 3、按题意给定的初始温度分布，确定各节点上的温度初值 t_n^0 ；
- 4、根据建立的差分方程组，求 $\Delta\tau$ 时刻各节点的温度 $t_n^{(1)}$ ；
- 5、再由 $t_n^{(1)}$ 为初值，换用 $\tau = 2\Delta\tau$ （即 $i=2$ ），重复 4 计算出 $t_n^{(2)}$ ，如此反复，最后得到 i 时刻的 $t_n^{(i)}$ 。

